

COMPITO GUGNO

① Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 1}} + 2$$

② Calcolare int. definito:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [e^{2x} \cos(3x) + 2x + 3] dx$$

③ Calcolare limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[3 + \frac{3x-3}{\sqrt{4x^2+x+2}} \right] \quad \text{Svolto}$$

X Inoltre determinare tutti gli asintoti della funzione
Svolto

● ④ Provare che se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$

$$\text{allora } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$$

⑤ Calcolare derivata

$$f(x) = \frac{3}{x - \sin x} + 2x$$

X Det. inoltre (se esiste) la retta tangente al

● graf. di $f(x)$ nel punto di ascissa $x_0 = \frac{\pi}{2}$

COMPITO QUINDO

2h

TESTO STES
ALL'ALTRO COMPITO
DI QUINDO

Calcolare il seguente limite

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[1 + \frac{x-1}{\sqrt{4x^2+2x+1}} \right]$$

Inoltre determinare tutti gli asintoti della funzione

$$f(x) = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$$

(2) Dimostrare e commentare il seguente teorema:

Siano $x_0, L, M \in \mathbb{R}$ ed $f(x)$ una funzione.

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = M$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ allora $L = M$

(3) Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [e^x \cos(2x) + x + 2] dx$$

(4) Calcolare la derivata seconda della seguente funzione

$$f(x) = \frac{1}{2x - \sin x} + x$$

Inoltre determinare (se esiste) la retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa $x_0 = \frac{\pi}{6}$

(5) Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} + 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{e^{2x} \cos(3x)}_{(1)} + \underbrace{2x}_{(2)} + \underbrace{3}_{(3)} dx =$$

$$(1) \int e^{2x} \cos 3x dx = \left\{ \begin{array}{l} f'(x) = e^{2x} \Rightarrow f(x) = \frac{e^{2x}}{2} \\ g(x) = \cos 3x \Rightarrow g'(x) = -3 \sin 3x \end{array} \right.$$

$$= \frac{e^{2x}}{2} \cos 3x - \int \frac{e^{2x}}{2} (-3 \sin 3x) dx = \frac{e^{2x}}{2} \cos 3x + \frac{3}{2} \int e^{2x} \sin 3x dx = \left\{ \begin{array}{l} f'(x) = e^{2x} \Rightarrow f(x) = \frac{e^{2x}}{2} \\ g(x) = \sin 3x \Rightarrow g'(x) = 3 \cos 3x \end{array} \right.$$

$$= \frac{e^{2x}}{2} \cos 3x + \frac{3}{2} \left(\frac{e^{2x}}{2} \sin 3x - \int \frac{e^{2x}}{2} \cdot 3 \cos 3x dx \right) =$$

$$= \frac{e^{2x}}{2} \cos 3x + \frac{3}{4} e^{2x} \sin 3x - \frac{9}{4} \int e^{2x} \cos 3x dx$$

$$\Rightarrow \int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{e^{2x}}{2} \cos 3x + \frac{3}{4} e^{2x} \sin 3x - \frac{9}{4} \int e^{2x} \cos 3x dx$$

$$\Rightarrow \int e^{2x} \cos 3x dx + \frac{9}{4} \int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{e^{2x}}{2} \cos 3x + \frac{3}{4} e^{2x} \sin 3x$$

$$\frac{13}{4} \int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{e^{2x}}{2} \cos 3x + \frac{3}{4} e^{2x} \sin 3x$$

$$\Rightarrow \int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{2}{13} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{13} e^{2x} \sin 3x + C$$

VERIFICA : $\frac{2}{13} \left(2 e^{2x} \cos 3x + 3 e^{2x} \sin 3x \right) + \frac{3}{13} \left(2 e^{2x} \sin 3x + 3 e^{2x} \cos 3x \right) =$
derivato

$$= \frac{4}{13} e^{2x} \cos 3x - \frac{6}{13} e^{2x} \sin 3x + \frac{6}{13} e^{2x} \sin 3x + \frac{9}{13} e^{2x} \cos 3x =$$

$$= \frac{13}{13} e^{2x} \cos 3x = e^{2x} \cos 3x \quad \checkmark \quad \text{verificato}$$

$$(2) \int 2x dx = 2 \int x dx = 2 \frac{x^2}{2} = x^2$$

$$(3) \int 3 dx = 3 \int dx = 3x$$



$$\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos 3x + 2x + 3 \, dx = \left[\frac{2}{13} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{13} e^{2x} \sin 3x + x^2 + 3x \right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \left(\frac{2}{13} e^{\frac{2\pi}{2}} \cos \frac{3\pi}{2} + \frac{3}{13} e^{\frac{2\pi}{2}} \sin \frac{3\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 3\frac{\pi}{2} \right) - \left(\frac{2}{13} e^{2 \cdot 0} \cos(3 \cdot 0) + \frac{3}{13} e^{2 \cdot 0} \sin(3 \cdot 0) + 0^2 + 3 \cdot 0 \right) =$$

$$= \frac{2}{13} e^{\pi} \cdot 0 + \frac{3}{13} e^{\pi} (-1) + \frac{\pi^2}{4} + \frac{3\pi}{2} - \left(\frac{2}{13} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{3}{13} \cdot 1 \cdot 0 \right) =$$

$$= -\frac{3}{13} e^{\pi} + \frac{\pi^2}{4} + \frac{3\pi}{2} - \frac{2}{13}$$

$$-5,34 + 2,46 + 4,71 - 0,15 = 1,67 \checkmark \quad \text{verf. tot. PC}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \frac{3x-3}{\sqrt{4x^2+x+2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \frac{x(3-\frac{3}{x})}{\sqrt{x^2(4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \frac{x(3-\frac{3}{x})}{\sqrt{x^2} \sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \frac{x(3-\frac{3}{x})}{|x| \sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \frac{x(3-\frac{3}{x})}{\underbrace{-x}_{\substack{\text{parte}^- \\ |x|=-x \text{ quando } x \rightarrow -\infty}} \sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \frac{3-(\frac{3}{x})^{\rightarrow 0}}{-1 \sqrt{4+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\downarrow 0}+\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\downarrow 0}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \frac{3}{-\sqrt{4}} = 3 + \frac{3}{-2} = 3 - \frac{3}{2} = \frac{6-3}{2} = \frac{3}{2}$$

Determinare tutti gli asintoti d.

$$y = 3 + \frac{3x-3}{\sqrt{4x^2+x+2}}$$

CERCO A.O. $\begin{cases} x \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow +\infty \end{cases}$ TROVATO $y = \frac{3}{2}$ as. orizz. di cui ∞ (cioè a $-\infty$)

$$(*) \lim_{x \rightarrow \infty} 3 + \frac{3x-3}{\sqrt{4x^2+x+2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3 + \frac{x(3-\frac{3}{x})}{\sqrt{x^2(4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \frac{x(3-\frac{3}{x})}{\sqrt{x^2} \sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \frac{x(3-\frac{3}{x})}{|x| \sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \frac{3 + \frac{3}{x}}{\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \frac{3 + \frac{3}{x}}{\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}} =$$

$\swarrow$
 perché $\lim_{x \rightarrow +\infty} |x| = +\infty$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $0 \quad 0$

$$= 3 + \frac{3}{\sqrt{4}} = 3 + \frac{3}{2} = \frac{6+3}{2} = \frac{9}{2}$$

$y = \frac{9}{2}$ asintota orizzontale destra (per $x \rightarrow +\infty$)

$\Rightarrow$ $\nexists$ asintote da' qua'

Ricerca asintoti verticali.

Domanda di $y = 3 + \frac{3x-3}{\sqrt{4x^2+x+2}}$

$$\sqrt{4x^2+x+2} \neq 0 \Rightarrow 4x^2+x+2 \neq 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4 \cdot 4 \cdot 2}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{-31}}{8} \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow x_{1/2} \notin \mathbb{R}$$

~~Il denominatore non si annulla mai~~
~~perché il discriminante è negativo~~

$\Rightarrow$ Il denominatore non si annulla mai

$\Rightarrow D:]-\infty; +\infty[\Rightarrow \nexists A.V.$

$$f(x) = \frac{3}{x - \sin x} + 2x$$

$$f'(x) = \frac{-3(1 - \cos x)}{(x - \sin x)^2} + 2$$

Devo calcolare la Tangente ad $f(x)$ in $x_0 = \frac{\pi}{2}$

- Trovo d'ordine per un punto:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

- Calcolo y_0 : $y_0 = f(x_0) = \frac{3}{x - \sin x} + 2x \Big|_{x_0 = \frac{\pi}{2}} = \frac{3}{\frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} =$

$$= \frac{3}{\frac{\pi}{2} - 1} + \pi = \frac{3}{\frac{\pi-2}{2}} + \pi = 3 \cdot \frac{2}{\pi-2} + \pi =$$

$$= \frac{6}{\pi-2} + \pi$$

$P_0\left(\frac{\pi}{2}; \frac{6}{\pi-2} + \pi\right) \Rightarrow$ ^ztrovo per P_0 : $y - \left(\frac{6}{\pi-2} + \pi\right) = m \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = mx - m \frac{\pi}{2} + \frac{6}{\pi-2} + \pi \quad (*k)$$

il coeff. angolare "m" della ^ztangente ad una curva è il valore della derivata prima in quel punto. Cioè

$$m = f'(x_0) = \frac{-3(1 - \cos x)}{(x - \sin x)^2} \Big|_{x_0 = \frac{\pi}{2}} = \frac{-3(1 - \cos \frac{\pi}{2})}{\left(\frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}\right)^2} + 2 = \frac{-3(1 - 0)}{\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2} + 2 =$$

$$= \frac{-3}{\left(\frac{\pi-2}{2}\right)^2} + 2 = \frac{-3}{\frac{(\pi-2)^2}{4}} + 2 = -\frac{3 \cdot 4}{(\pi-2)^2} + 2 = \frac{-12}{(\pi-2)^2} + 2$$

$\Rightarrow$

L'eq. della Tarpeire d'ente

$$(*) \quad y = \underbrace{\left(-\frac{12}{(\pi-2)^2} + 2 \right)}_{P} x - \underbrace{\left(-\frac{12}{(\pi-2)^2} + 2 \right) \frac{\pi}{2} + \frac{6}{\pi-2} + \pi}_{Q = 19,70}$$

(la eq. di una rete è della forma $y = Px + Q$)

VERIFICATA!

(si possono fare piccoli aggiustamenti d'ordine)

$$f(x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}} + 2$$

DOMINIO: $\sqrt{x^2+1} \neq 0 \Rightarrow x^2+1 \neq 0 \quad \Delta = 0 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0 \Rightarrow \nexists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ il polinomio non si annulla mai

$\Rightarrow D:]-\infty; +\infty[$

SEGNO:

$$\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}} + 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{-x + 2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \geq 0$$

sempre $\sqrt{x^2+1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{D}$
moltiplicazione
 $-x + 2\sqrt{x^2+1} \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -x + 2\sqrt{x^2+1} \geq 0 \Rightarrow 2\sqrt{x^2+1} \geq x \Rightarrow \sqrt{x^2+1} \geq \frac{x}{2}$$

Sei nel caso $\sqrt{A(x)} \geq B(x)$ in pari passo devo risolvere

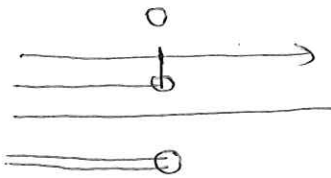
$$\begin{cases} \frac{x}{2} < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{x}{2} \geq 0 \\ A(x) > \left(\frac{x}{2}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} < 0 \\ x^2+1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{x}{2} \geq 0 \\ x^2+1 > \frac{x^2}{4} \end{cases}$$

① ②

① $\frac{x}{2} < 0 \Rightarrow x < 0$

$x^2+1 \geq 0 \Rightarrow$ sempre

sempre.



Soluzione I sistema

$\boxed{x < 0}$

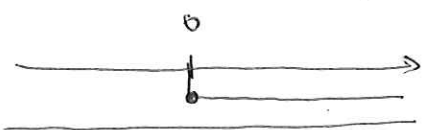
② $\frac{x}{2} \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

$$x^2+1 > \frac{x^2}{4} \Rightarrow x^2 - \frac{x^2}{4} + 1 > 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{4}\right)x^2 + 1 > 0 \Rightarrow \frac{3}{4}x^2 + 1 > 0$$

$\Delta = 0 - 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 = -3 < 0 \Rightarrow$ il segno è sempre come il coeff. di grado

massimo, cioè $\frac{3}{4}$ che è sempre positivo $\Rightarrow \frac{3}{4}x^2 + 1 > 0$ SEMPRE

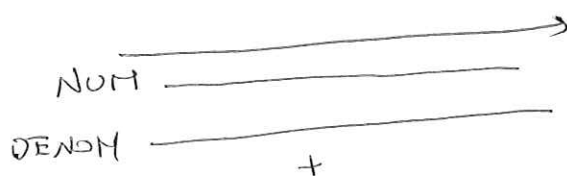
Soluzione II sistema



cioè $\boxed{x \geq 0}$

Sol. I sistema + Sol. II sistema $\Rightarrow$ sempre

ne segue il grafico del segno



$f(x)$ è sempre
positiva
(quindi non ci sono
intersezioni con l'asse x)

~~intersezioni~~

INT. ASSE Y

$$\begin{cases} x=0 \\ y = \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}} + 2 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{0}{\sqrt{0+1}} + 2 = 0+2$$

$A(0;2)$ punto di
int. con y

LIMITI

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}} + 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}} + 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} + 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{|x| \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} + 2$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} + 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} + 2 = \frac{1}{1} + 2 = 1+2 = 3 \quad (\text{A.O.})$$

$\downarrow$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = -x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}} + 2 = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} + 2 =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} + 2 = \frac{-1}{1} + 2 = -1+2 = 1 \quad (\text{A.O.})$$

$\downarrow$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |x| = +x$

DERIVATA

$$y' = \frac{-1 \sqrt{x^2+1} + x \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x}{x^2+1} = \frac{-2(x^2+1) + x^2}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{x^2+1} =$$

$$= \frac{-x^2-1+x^2}{\sqrt{x^2+1} (x^2+1)} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+1} (x^2+1)}$$

$$y' = - \frac{1}{\sqrt{x^2+1} (x^2+1)}$$

osservazioni sul $D_{y'}$

chiedo che $\sqrt{x^2+1} (x^2+1) \neq 0$ cioè che $\sqrt{x^2+1} \neq 0$
 $(x^2+1) \neq 0$

ma siccome so che x^2+1 non ha radici (poiché $\Delta < 0$)
 real.

allora sicuramente se $\sqrt{x^2+1}$ e (x^2+1) sono $\neq 0$

$\Rightarrow D_{y'} =]-\infty; +\infty[\Rightarrow$ NON ci sono punti di discontinuità
 per y' .

Studio segno y'

$$\frac{\text{sempre}}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\text{sempre}} \underbrace{(x^2+1)}_{\text{sempre}}} \geq 0$$

$\Rightarrow$ sempre decrescente

DERIVATA SECONDA

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{-1}{\sqrt{x^2+1} (x^2+1)} \right)' = \left(\frac{-1}{(x^2+1)^{1/2} (x^2+1)} \right)' = \left(\frac{-1}{(x^2+1)^{3/2}} \right)' = \\ &= \frac{+\frac{3}{2} (x^2+1)^{1/2} \cdot 2x}{\left((x^2+1)^{3/2} \right)^2} = \frac{3\sqrt{x^2+1} \cdot x}{(x^2+1)^3} = \frac{3x \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\text{sempre}}}{\underbrace{(x^2+1)^3}_{\text{sempre}}} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$\Rightarrow$ sempre crescente

$x=0 \Rightarrow y=2$ (calcolo per l'INTEGRALE) $\Rightarrow A(0,2)$ è un flesso

